Corrigés exercices sur les solides usuels

A Le cube

Introduction

Le cube a 6 faces identiques, 8 sommets et 12 arêtes de même longueur. Les faces sont des carrés et les arêtes ont pour extrémités des sommets.

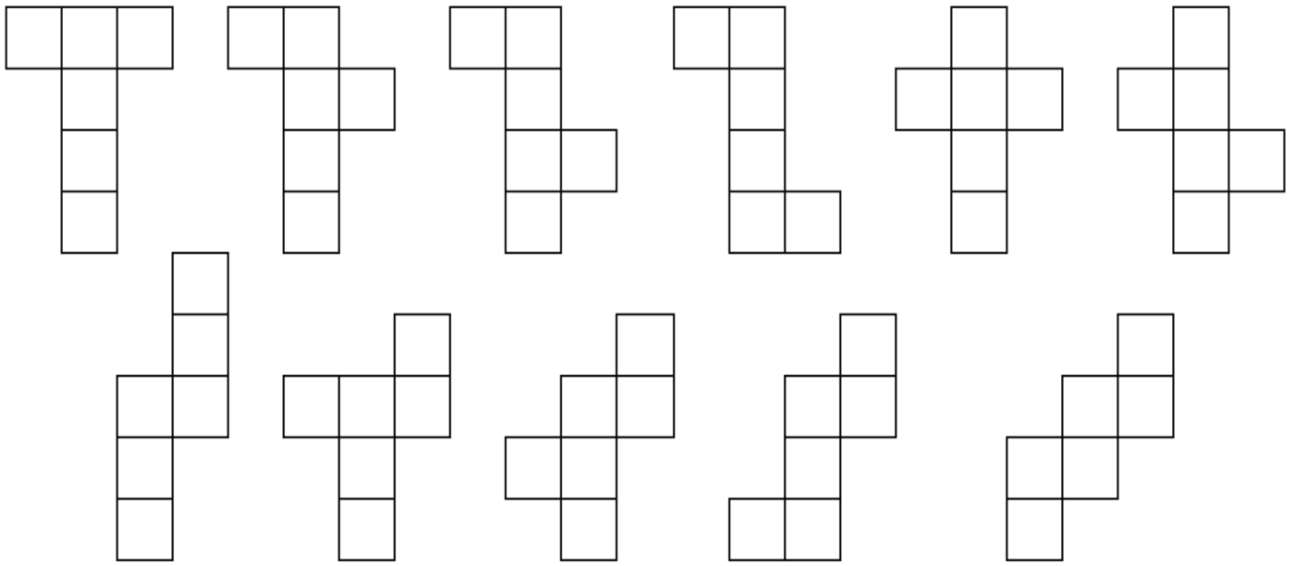
Les 11 patrons du cube sont les 11 façons différentes de disposer les 6 faces sans superposition et assembler par les arêtes de façon à pouvoir reconstituer le cube.

Les voici :

Les 6 premiers présentent un alignement de 4 carrés.

Les 4 suivants présentent un alignement de 3 carrés.

Le dernier ne présente que des alignements de carrés deux par deux.



Exercice 1

1. Les faces cachées sont en gras dans le tableau :

face	$ABFE$	$BCGF$	**CDHG**	**DAEH**	**ABCD**	$EFGH$
motif	*hachures*	*uni*	*hachures*	*uni*	*points*	*points*

2. Pour répondre à cette question, il est implicite :

   ✓ qu'on ne tient pas compte ni du nombre de points de l'original ni du nombre de ses hachures (qui manifestement diffèrent entre la figure n°1 et les "patrons" proposés) ;

   ✓ qu'on ne tient pas compte ni de l'orientation du pointillage (pointillage parallèlement aux côtés du carré pour la figure n°1 et parallèlement aux diagonales du carré pour la figure n°2), ni de celle de ses hachures.

   Patron n°1 : oui ! Pour le vérifier, il suffit de nommer les points correctement et de vérifier que les motifs coïncident avec ceux proposés dans l'inventaire de la question 1.

   Patron n°2 : non ! Par repliage mental, on s'aperçoit que ce ne sont pas des faces opposées qui ont même motif mais des faces adjacentes.

   Patron n°3 : oui ! Pour le vérifier, il suffit de nommer les points correctement et de vérifier que les motifs coïncident avec ceux proposés dans l'inventaire de la question 1.

   Patron n°4 : non ! Par repliage mental, on s'aperçoit que les faces hachurées sont effectivement opposées, mais que ce n'est le cas ni des faces pointées ni des faces unies qui sont adjacentes.

3. (a) On obtient $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ petits cubes.

   (b) Le volume du petit cube est le volume du grand cube divisé par le nombre de petits cubes qui composent ce grand cube (le volume est une mesure), d'où le volume du petit cube est $\frac{216cm^3}{27} = 8cm^3$.

   (c) La longueur d'une arête du petit cube est donnée par la racine cubique de son volume, d'où le côté du petit cube mesure $\sqrt[3]{8cm^3} = 2cm$. La longueur d'une arête du grand cube est donnée par la racine cubique de son volume, d'où le côté du grand cube mesure $\sqrt[3]{216cm^3} = 6cm$.

(d)

nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
nombre de petits cubes	$1^{(*)}$	$6^{(**)}$	$12^{(***)}$	$8^{(****)}$	0	0	0

$^{(*)}$: le cube du centre ;

$^{(**)}$: les six petits cubes ayant une face qui coïncide avec le cube du centre ;

$^{(***)}$: les douze petits cubes ayant seulement un côté (en tant que droite) commun avec ceux (toujours en tant que droite) du grand cube ;

$^{(****)}$: les huit petits cubes ayant trois côtés (en tant que droite) communs avec ceux (toujours en tant que droite) du grand cube (ou ayant un sommet commun avec ceux du grand cube).

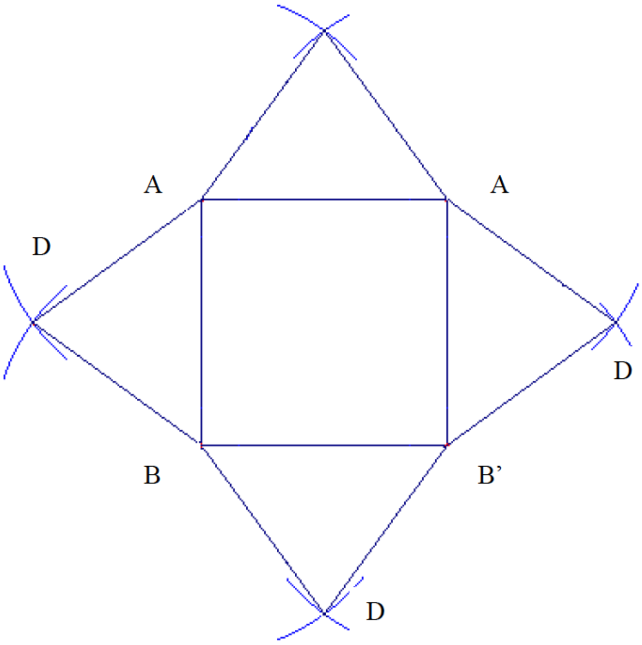
(e) Le nombre de petites faces décorées est six (le nombre de faces du grand cube) fois neuf (le nombre de faces décorées sur une face du grand cube), soit 54. On peut retrouver ce résultat en utilisant le tableau de la question précédente : $0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 12 + 3 \times 8 = 54$.

4. (a) Le nouveau solide est constitué de $27 - 8 = 19$ petits cubes. Il a donc un volume de $19 \times 8cm^3 = 152cm^3$.

(b) Le nouveau solide a une aire latérale égale à celle du cube car l'action "j'enlève un petit cube en l'un des sommets du grand cube" n'a aucun effet sur l'aire latérale (on remplace l'aire de trois des faces d'un petit cube par l'aire des trois autres faces de ce même petit cube). Il a donc une aire latérale de

$$\underbrace{6}_{\text{nombre de faces}} \times \underbrace{\underbrace{6cm}_{\text{côté du grand cube}} \times \underbrace{6cm}_{\text{côté du grand cube}}}_{\text{aire d'une face du grand cube}} = 216cm^2.$$

Exercice 2



O

Le carré qui est au centre a des côtés de longueur 4cm, ce sont également des arêtes du cube. La base de cette pyramide est un carré (face du cube) AA'BB' et le sommet 0. Pour calculer OA, on utilise la diagonale AC' dans le cube. Pour calculer AC' on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADC'. Le carré de l'hypoténuse AC' est égale à la somme des carrés de AD et de DC'. On trouve AC'=4 $\sqrt{3}$ cm et AO=2 $\sqrt{3}$ cm.

AO=A'O=B'O=BO.

Dans le cube, il y a 6 pyramides identiques à la pyramide AA'BB'O.

Le volume du cube est égal à 6 fois le volume d'une pyramide. Le volume du cube est égal à $4^3 cm^3$. Le volume de la pyramide est obtenue en divisant par 6.

B Les parallélépipèdes

Exercice 3

Le parallélépipède a lui aussi 11 patrons, en prenant les 11 patrons du cube on trouve les 11 patrons du parallélépipède. Il y aura à chaque fois, 4 faces rectangulaires et deux carrées. Les parallélépipèdes rectangles ou droits ont des faces perpendiculaires deux à deux.

Exercice 4

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH, dont les dimensions sont données par AD=3,6cm ; AB=4,8cm ; et AE=7,2cm.

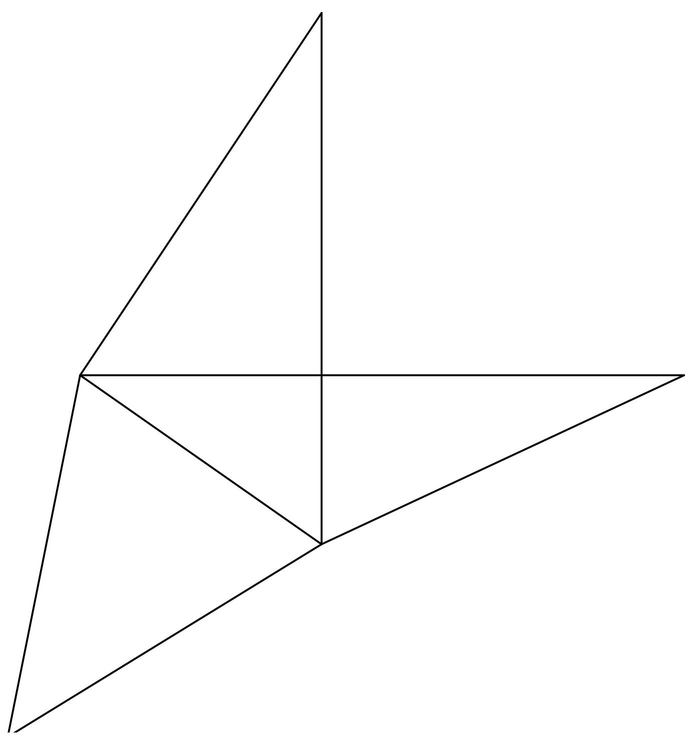
1) La face ABCD est un rectangle puisque le parallélépipède est rectangle.

ABC est le triangle obtenu en traçant une diagonale, l'angle B est droit le triangle est rectangle.

2) D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle ABC rectangle en B. Le carré de AC est égal à la somme des carrés des deux autres côtés de longueur 3,6cm et 4,8cm : on trouve AC=6cm.

3) Il faut construire à la règle et au compas, la perpendiculaire à (AB) passant par B. (utiliser la médiatrice de MN avec M et N symétriques par rapport à B).

4)



5 a) Vol (pyramide) = Aire (ABC) x BF :3 = 0,5x4,8x3,6x7,2 :3 =21,6 en cm^3

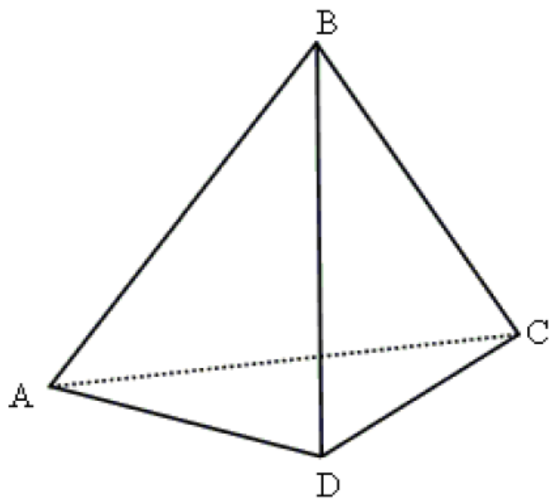
soit 0,216cl

b) Vol (parallépipède) =3,6x4,8x7,2= 124,416cm^3 c'est bien 6 fois la pyramide.

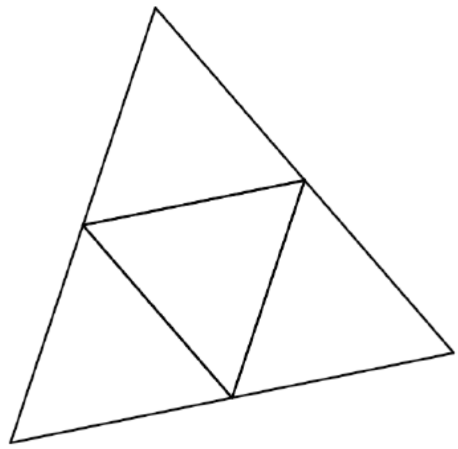
C Le tétraèdre

Exercice 5

Le tétraèdre a 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes. Il existe des tétraèdres réguliers et des tétraèdres non réguliers. Les tétraèdres réguliers ont toutes leurs arêtes de même longueur.



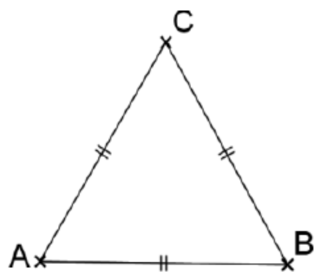
Les différents patrons du tétraèdre régulier sont des assemblages des 4 triangles équilatéraux que sont les faces. Ci-dessous en voici un, chercher l'autre….(on l'obtient en alignant les 4 triangles).



Exercice 6

1)

K représente le centre de gravité du triangle, mais c'est aussi le centre du cercle circonscrit ou le centre du cercle inscrit car dans un triangle équilatéral les hauteurs sont en même temps médianes, médiatrices des cotés et bissectrices des angles du triangle. Pour tracer K, tracer les 3 hauteurs. On appelle H le pied de la hauteur issue de A.



Comme K est le centre de gravité du triangle, il se trouve au tiers de la médiane (qui est aussi la hauteur AH) en partant du milieu du côté.

AK=2/3 AH.

On sait que ABC est équilatéral et que AHB est un triangle rectangle.

On applique le théorème de Pythagore au triangle ABH. On a :

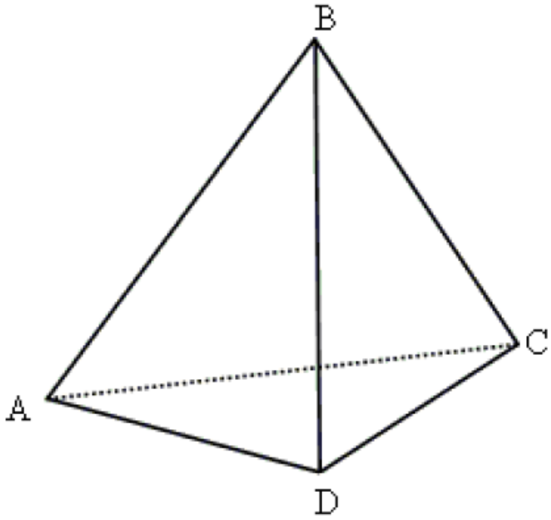
$AH^2+BH^2=AB^2$

$AH^2=a^2-(a/2)^2=3a^2/4$

AH=aV3:2 l.

AK=2/3AH=aV3/3 .

2)



a) On joint le centre de gravité K de ABC au point D. La droite (DK) est perpendiculaire aux droites (AK), (BK) et (CK) si et seulement si la droite (DK) est perpendiculaire au plan (ABC) . Si on appelle D' le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) pour des raisons de symétries, D' est à égale distance des points A, B, C c'est donc le centre du cercle circonscrit qui est aussi le centre de gravité, c'est donc le point K, D'=K.

b) Calcul de DK : On applique le théorème de Pythagore au triangle DAK rectangle en K.

$$DK^2 + AK^2 - AD^2$$

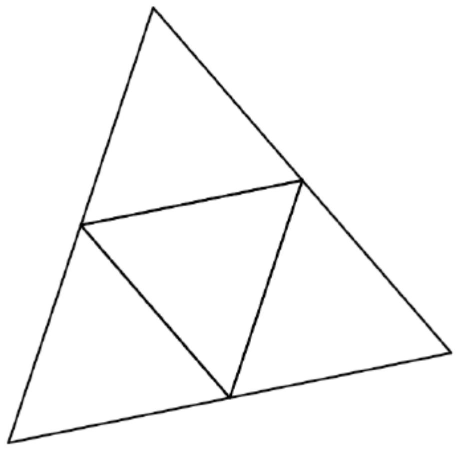
On applique d'abord le théorème de Pythagore au triangle ADK.

$AK^2+KD^2=AD^2$

Puis encore le théorème de Pythagore à DKB puis DKC.

Le tétraèdre est donc régulier.

3) Un patron du tétraèdre ABCD est :



L'aire totale des faces du tétraèdre en fonction de a est la somme des aires des 4 triangles équilatéraux qui sont les faces. L'aire d'une face est l'aire d'un triangle, la formule est (B x h) : 2. L'aire d'une face est l'aire d'un triangle équilatéral c'est à dire ax$\frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$ car la base est égale à a et la hauteur est égale à

$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

L'aire totale s'obtient en multipliant par 4. Ce qui donne : ax$\frac{a\sqrt{3}}{2} \times 2$

$a^2\sqrt{3}$

Le volume du tétraèdre est donné par la formule

$V = \frac{1}{3} \times A \times h$ .A est l'aire d'une face et h la hauteur relative à cette face.

V(a)=(a²V3/4)x(aV2/V3)x1/3= a³V2/12

4)

a	5	10	15	19	20	21	22
V(a)	15	118	398	808	943	1091	1255

1 litre correspond à $1000 cm^3$

Il faut chercher l'abscisse du point d'ordonnée $1000 cm^3$

La réponse est entre 20 et 21cm. Une valeur approchée est 20,4cm.